Aufgabe 5: Gemeinsame Lotgerade zweier windschiefer Geraden - kürzester Abstand

Worum geht es in der Aufgabe?

- Aufstellen einer Gleichung der gemeinsamen Lotgeraden zweier windschiefer Geraden
- Ermittlung des kürzesten Abstands zweier windschiefer Geraden

Allgemeine Situation:

Gegeben seien 2 windschiefe Geraden g und h.

(Gegebenfalls müsste nachgewiesen werden, dass g und h windschief sind.)

a) Bestimme eine Gleichung der gemeinsamen Lotgeraden von g und h.

b) Bestimme damit den kürzesten Abstand zwischen g und h.

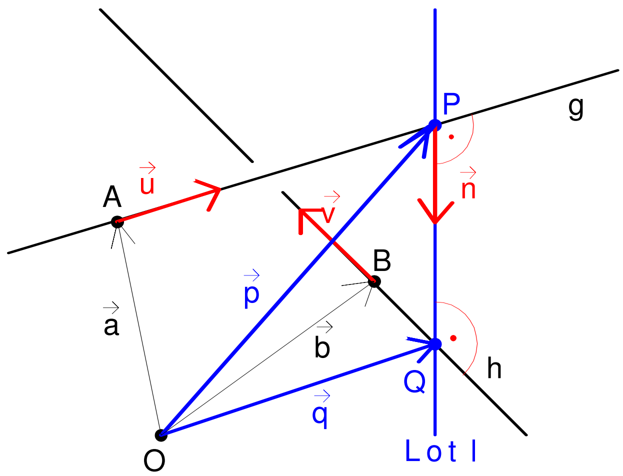
Aufgaben:

1) Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Allgemeine Überlegungen:



Die beiden Geraden seien in Paramterform gegeben, also:

g: $\vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$ und

h: $\vec{x} = \vec{b} + l\vec{v}$

Das gemeinsame Lot l von g und h ist bestimmt durch 2 Punkte P und Q,

wobei $P \in g$ und $Q \in h$ ist.

Damit ist l von der Form: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{n}$.

Weiter ist $\vec{n}$ ein gemeinsamer Lotvektor zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Zur Ermittlung des gemeinsamen Lotes müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(1) Gemeinsamer Lotvektor $\vec{n}$, also: $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ und $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$

(2) $P \in g$, also $\vec{p} = \vec{a} + k\vec{u}$ und

$Q \in h$, also $\vec{q} = \vec{b} + l\vec{v}$

(3) $\overrightarrow{PQ}$ ist ein Differenzenvektor, also $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$

(4) $\overrightarrow{PQ}$ ist ein Vielfaches des Lotvektors $\vec{n}$, also: $\overrightarrow{PQ} = s \cdot \vec{n}$

Aus (1) folgt ein möglicher Lotvektor $\vec{n}$.

Aus (3) und (4) ergibt sich: $\vec{q} - \vec{p} = s \cdot \vec{n}$

mit (2) folgt: $\vec{b} + l\vec{v} - \vec{a} - k\vec{u} = s \cdot \vec{n}$ (*)

Da $\vec{n}$ gemeinsamer Lotvektor zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist, besteht der „Trick“ darin, die Gleichung mit $\vec{n}$ zu multipilizeren,

also $(\vec{b} - \vec{a}) \circ \vec{n} + l\vec{v} \circ \vec{n} - k\vec{u} \circ \vec{n} = s \cdot \vec{n} \circ \vec{n}$

wegen (1) folgt: $(\vec{b} - \vec{a}) \circ \vec{n} = s \cdot |\vec{n}|^2$ (**)

Die weiteren Schritte lassen sich jetzt nur allgemein beschreiben:

- Einsetzen von $\vec{n}$ in (**) liefert den Parameter s.
- Einsetzen von s in (*) liefert ein Gleichungssystem mit den Unbekannten k und l. Diese lassen sich somit ermitteln.
- Einsetzen von k und l in die Gleichungen von g und h liefert mit (2) die Punkte P und Q.
- Mit P und Q erhält man die gemeinsame Lotgerade l = PQ in Parameterform.
- Der kürzeste Abstand d zwischen g und h ist damit die Länge der Strecke [PQ], also $d = \overline{PQ}$.

Lösung der Aufgabe 1:

Aus (1) folgt als möglicher Lotvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es gilt (**), also $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cdot \left(2^2 + (-1)^2 + 2^2\right)$

somit $4 + 3 + 2 = s \cdot (4 + 1 + 4) \Rightarrow 9 = 9s \Rightarrow \underline{\underline{s = 1}}$

Einsetzen von s in (*): $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

liefert das GS: $\begin{array}{ll} \text{I} & l = 0 \\ \text{II} & -2k + 2l = 2 \\ \text{III} & -k = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{l = 0}} \\ \\ \underline{\underline{k = -1}} \end{array}$ II ist erfüllt

Einsetzen von k und l in g und h: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P(1 \mid 2 \mid 0)}}$

$\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Q(3 \mid 1 \mid 2)}}$

Aufstellen der Lotgeraden: $l\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Kürzester Abstand d: $\underline{\underline{d}} = \overline{PQ} = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \underline{\underline{3\text{ LE}}}.$

Zusatz: Skizziere g, h und l in einem Koordinatensystem!

Lösung der Aufgabe 2:

Entsprechend zur Aufgabe 1 erhält man

- als mögliche gemeinsame Lotgerade $\quad l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- als kürzesten Abstand d $\quad \underline{\underline{d = 1\ \text{LE}}}$.

Lösung der Aufgabe 3:

Entsprechend zur Aufgabe 1 erhält man

- als mögliche gemeinsame Lotgerade $\quad l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5/14 \\ 1 \\ 9/7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- als kürzesten Abstand d $\quad \underline{\underline{d = \sqrt{14}\ \text{LE}}}$